4-1. 電場が式（4.5）で表されるとき，磁場が式（4.6）となることを示せ．

解答 入射電場 $\boldsymbol{E}_i$ を

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{A}_i e^{i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)} \tag{4.5}$$

と表したとき，磁場 $\boldsymbol{B}_i$ が

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{A}_i}{\omega} e^{i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)} \tag{4.6}$$

となることを示す．マクスウェル方程式（2.29a）より

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

なので，これが成立しているかを確認する．

左辺に (4.5) を代入すると

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_i = i\boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{A}_i e^{i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)}$$

であり，右辺に（4.6）を代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \boldsymbol{B}_i}{\partial t} &= i\omega \left[\frac{\boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{A}_i}{\omega} e^{i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)}\right] \\ &= i\boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{A}_i e^{i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)} \end{aligned}$$

となり，マクスウェル方程式（2.29a）が成立していることがわかる．

4-2. 3 次元の伝搬方程式（3.31）から，式（4.23）を導け．

解答 式（3.31）の $\partial^2/\partial z^2$ を ∇^2 に直して，$\boldsymbol{E}_t$ に関する 3 次元の伝搬方程式にすると

$$-\nabla^2 \boldsymbol{E}_t = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_r\left(\omega\right) \boldsymbol{E}_t \tag{3.31}$$

となる．$\boldsymbol{E}_t$ は

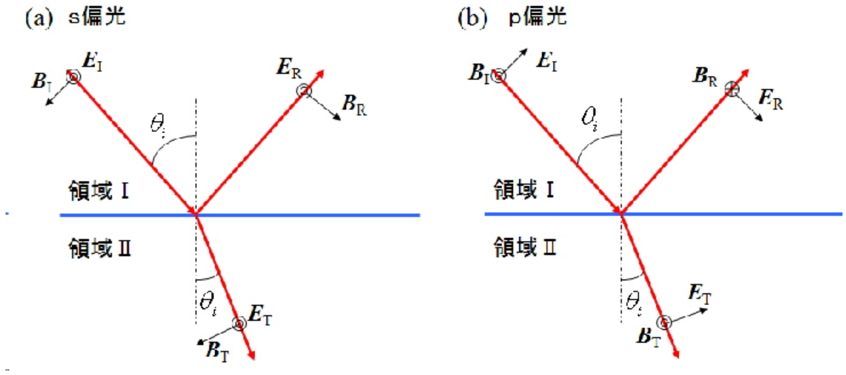
$$\boldsymbol{E}_t = \widetilde{\boldsymbol{A}}_t \exp\left[i\left(\widetilde{\boldsymbol{k}}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right)\right] \tag{4.20}$$

なので, (3.31）に代入して

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{k}}_t \cdot \widetilde{\boldsymbol{k}}_t\right) \boldsymbol{E}_t = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_r\left(\omega\right) \boldsymbol{E}_t$$

となるので式（4.23）が導かれる．

4-3. p 偏光の場合の反射係数（4.31a）と透過係数（4.31b）を導け．



解答　図 4.5(b) のように電場と磁場の向きを決めておく．このような電場の向きを選んだ理由は，垂直入射（$\theta_i = 0$）の場合に，$\boldsymbol{E}_i$ と $\boldsymbol{E}_r$ が同じ向きで同符号にするためである．

この場合には $\boldsymbol{B}$ は接線成分しかないので，境界条件は

$$|\boldsymbol{k}_i|\, A_i - |\boldsymbol{k}_r|\, \tilde{A}_r = |\boldsymbol{k}_t|\, \tilde{A}_t$$

である．

$$|\boldsymbol{k}_i| = |\boldsymbol{k}_r| = \frac{\omega}{c} n_1, \quad |\boldsymbol{k}_t| = \frac{\omega}{c} n_2$$

なので

$$n_1 \left(A_i - \tilde{A}_r \right) = n_2 \tilde{A}_t \tag{4.3.1}$$

となる．

$\boldsymbol{E}$ に関する境界条件は，接線成分が連続であることより

$$\left(A_i + \tilde{A}_r \right) \cos\theta_i = \tilde{A}_t \cos\theta_t \tag{4.3.2}$$

となる．(4.3.1) と (4.3.2) より

$$\tilde{r}_p = \frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} \tag{4.31a}$$

$$\tilde{t}_p = \frac{2 n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} \tag{4.31b}$$

が導かれる．

4-4. 虚部がない場合の垂直入射（n_1 から n_2 へ）の反射を考える．$n_1 > n_2$ の場合に反射の位相変化がなく，$n_1 < n_2$ の場合には位相変化が π であることを示せ．

解答　垂直入射なので，ｓ偏光とｐ偏光の区別なく反射係数は

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

となる．$n_1 > n_2$ の場合には $r > 0$ なので，反射光の電場の向きは入射光と同じ，$n_1 < n_2$ の場合には $r < 0$ となるので，反対向きとなる．

4-5. 式（4.34）を導け．

解答 導くのに必要な式を並べておく．

$$\frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta_i = |\boldsymbol{k}_1| \sin\theta_t \tag{4.22}$$

$$|\boldsymbol{k}_1|^2 - |\boldsymbol{k}_2|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(n_2^2 - \kappa_2^2\right) \tag{4.24a}$$

$$|\boldsymbol{k}_1|\,|\boldsymbol{k}_2| \cos\theta_t = \frac{\omega^2}{c^2} n_2 \kappa_2 \tag{4.24b}$$

$$n_1 \sin\theta_i = \tilde{n}_2 \sin\tilde{\theta}_t \tag{4.32}$$

$$\cos\tilde{\theta}_t = \sqrt{1 - \sin^2\tilde{\theta}_t} \tag{4.33}$$

証明したい式は

$$\frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 \cos\tilde{\theta}_t = |\boldsymbol{k}_1| \cos\theta_t + i\,|\boldsymbol{k}_2| \tag{4.34}$$

なので，この式の両辺を２乗して等しいことを示す．右辺を２乗すると

$$\begin{aligned}
[\text{右辺}]^2 &= \left(|\boldsymbol{k}_1| \cos\theta_t + i\,|\boldsymbol{k}_2|\right)^2 \\
&= |\boldsymbol{k}_1|^2 \cos^2\theta_t - |\boldsymbol{k}_2|^2 + 2i\,|\boldsymbol{k}_1|\,|\boldsymbol{k}_2| \cos\theta_t \\
&= |\boldsymbol{k}_1|^2 - |\boldsymbol{k}_2|^2 + 2i\,|\boldsymbol{k}_1|\,|\boldsymbol{k}_2| \cos\theta_t - |\boldsymbol{k}_1|^2 \sin^2\theta_t
\end{aligned}$$

となるが,（4.24a）と（4.24b）を用いて

$$\begin{aligned}
[\text{右辺}]^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}\left(n_2^2 - \kappa_2^2 + 2in_2\kappa_2\right) - |\boldsymbol{k}_1|^2 \sin^2\theta_t \\
&= \frac{\omega^2}{c^2}\left(\tilde{n}_2\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta_i\right)^2
\end{aligned}$$

と変形できる．最後の式に変形には（4.22）を用いた．あとは,（4.32）と（4.34）を用いて

$$\begin{aligned}
[\text{右辺}]^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}\left(\tilde{n}_2\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 \sin\tilde{\theta}_t\right)^2 \\
&= \frac{\omega^2}{c^2}\left(\tilde{n}_2\right)^2 \left[1 - \sin^2\tilde{\theta}_t\right] \\
&= \frac{\omega^2}{c^2}\left(\tilde{n}_2\right)^2 \cos^2\tilde{\theta}_t \\
&= [\text{左辺}]^2
\end{aligned}$$

となる．

4-6. $\widetilde{\boldsymbol{k}}_t$ が式（4.35）と表されることを示せ．

解答 複素数の波数ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{k}}_t$ の意味は，図 4.3 のように，実部が屈折角 θ_t の方向に向き，虚部が境界面に垂直（z 方向）に向くということである．それを表しているのが，式（4.36）である．本文の説明にあるように，式（4.35）から式（4.22）,（4.32）,（4.34）を使って式（4.36）が導かれる．したがって，式（4.35）は複素数の波数ベクトルの意味を表しており，この表式は通常の実数の角度のときに使うものを同じである．このことは，光学定数に虚部がある場合でも，角度を複素数として表せば，同じ表式が使えることを意味している．

4-7. 反射率と透過率に関して，式（4.49）のように角度補正することでエネルギー保存が満たされることを示せ．また，虚部がある場合には，有効屈折率 n^{eff} を用いなければいけないことを確認せよ．

解答 光強度（ポインティングベクトルの大きさ）は単位面積を単位時間に通過するエネルギーなので，図 4.7 のように光ビームの大きさが変わる場合には，そのことも考慮して全エネルギーでの保存を考える必要がある．全エネルギーは光強度 × ビーム面積なので，

$$I_i W_i = I_r W_r + I_t W_t \tag{4.7.1}$$

がエネルギー保存として成立する．ここで，W_i, W_r, W_t はそれぞれ，入射光，反射光，透過光のビーム面積である．入射角と反射角は等しいので

$$W_i = W_r$$

であり，W_i と W_t の関係は図 4.7 からもわかるように

$$W_t = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} W_i$$

である．これらの関係を考慮して，式（4.7.1）の両辺を $I_i W_i$ で割って

$$\begin{aligned}1 &= \frac{I_r}{I_i} + \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{I_t}{I_i} \\ &= R + \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} T\end{aligned}$$

が導かれる．

実際に s 偏光での反射係数と透過係数を用いて計算すると

$$\begin{aligned}R + \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} T &= \left(\frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\right)^2 + \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\right)^2 \\ &= \frac{(n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t)^2 + 2n_1 n_2\cos\theta_i\cos\theta_t}{(n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t)^2} \\ &= \frac{(n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t)^2}{(n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t)^2} = 1\end{aligned}$$

となって，式（4.49）は確認される．p偏光についても，同様な計算で確認できる．

虚部がある場合には，n_2 や θ_t が複素数になるので，例えばs偏光では

$$R+\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}T=\left|\frac{n_1\cos\theta_i-\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_t}{n_1\cos\theta_i+\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_t}\right|^2+\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{n_2}{n_1}\left|\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_t}\right|^2$$

という式になるが，右辺の n_2 に $\tilde{n}_2$ を入れるべきか，$\tilde{n}_2$ の実部を入れるべきかわからなくなる．しかし，これはいずれも間違いであり，n_2 のところには有効屈折率 n^{eff} を入れなければならない．以下でそれを示すために，$\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_t$ の実部と虚部をあらわに書き下すと

$$\begin{aligned}\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_t&=\frac{c}{\omega}\left(|\boldsymbol{k}_1|\cos\theta_t+i\,|\boldsymbol{k}_2|\right)\\&=\frac{c}{\omega}\left(\frac{\omega}{c}n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t+i\,|\boldsymbol{k}_2|\right)\\&=n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t+iB\end{aligned}$$

となる．ここで，虚部をまとめて B と置いた．また，これらの式変形には,（4.25）や（4.34）を用いている．この表式を用いて，計算してみると

$$\begin{aligned}R+\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}T&=\left|\frac{n_1\cos\theta_i-\left(n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t+iB\right)}{n_1\cos\theta_i+\left(n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t+iB\right)}\right|^2+\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{n^{\mathrm{eff}}}{n_1}\left|\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+\left(n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t+iB\right)}\right|^2\\&=\frac{\left(n_1\cos\theta_i-n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t\right)^2+B^2}{\left(n_1\cos\theta_i+n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t\right)^2+B^2}+\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{n^{\mathrm{eff}}}{n_1}\frac{4n_1^2\cos^2\theta_i}{\left(n_1\cos\theta_i+n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t\right)^2+B^2}\\&=\frac{\left(n_1\cos\theta_i+n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t\right)^2+B^2}{\left(n_1\cos\theta_i+n^{\mathrm{eff}}\cos\theta_t\right)^2+B^2}=1\end{aligned}$$

となり，n_2 のところに有効屈折率 n^{eff} を用いれば，エネルギー保存が成立していることがわかる．p偏光についても同様にして確認ができる．

4-8. ブリュスター角の満たすべき式（4.50）を導け．さらに，$\theta_{\mathrm{B}}+\theta_t=\pi/2$ を満たすことを示せ．

解答 p偏光で反射がゼロとなる式

$$n_1\cos\theta_t-n_2\cos\theta_{\mathrm{B}}=0 \tag{4.8.1}$$

とスネルの法則

$$n_1\sin\theta_B=n_2\sin\theta_t \tag{4.17}$$

から θ_t を消去する．

$$\begin{aligned}\cos\theta_t&=\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_B\\\sin\theta_t&=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_B\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos^2\theta_t + \sin^2\theta_t \\
&= \left(\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_B\right)^2 + \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_B\right)^2
\end{aligned}
$$

となり，全体を $\cos^2\theta_B$ で割って

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \tan^2\theta_B &= \frac{1}{\cos^2\theta_B} \\
&= 1 + \tan^2\theta_B
\end{aligned}
$$

と $\tan^2\theta_B$ だけの式に変形できる．あとは整理すれば

$$
\tan^2\theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2
$$

となり，式（4.50）が導かれる．
また，式（4.42c）より，$r_p = 0$ となるためには，分母が無限大になる必要があるので，

$$
\tan(\theta_{\mathrm{B}} + \theta_t) = \infty
$$

すなわち，

$$
\theta_{\mathrm{B}} + \theta_t = \frac{\pi}{2}
$$

であることがわかる．また，式（4.42c）を使わなくても，（4.8.1）と（4.17）から，それぞれ

$$
\begin{aligned}
\frac{n_2}{n_1} &= \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_B} \\
\frac{n_2}{n_1} &= \frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_t}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\cos\theta_B \sin\theta_t - \cos\theta_t \sin\theta_B = 0
$$

が導かれ，

$$
\cos(\theta_{\mathrm{B}} + \theta_t) = 0
$$

となって，$\theta_{\mathrm{B}} + \theta_t = \pi/2$ を示すこともできる．

4-9. $R_\perp$ と θ から，n と κ を求める式（4.73）を導け．

解答 式（4.69）と式（4.70）から

$$
\frac{1 - n - i\kappa}{1 + n + i\kappa} = re^{i(\theta - \pi)}
$$

となる．これを整理して

$$
\begin{aligned}
1-n-i\kappa &= \left[r\cos\left(\theta-\pi\right)+ir\sin\left(\theta-\pi\right)\right]\left(1+n+i\kappa\right)\\
&= -r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\left(1+n+i\kappa\right)
\end{aligned}
$$

となり，両辺の実部と虚部を比較した 2 つの式から，n と κ を求めると式（4.73）となる．