3-1. デバイ緩和の応答関数（3.8）から，感受率の実部と虚部を計算せよ．実部と虚部が，条件 3 と 4 を満たしていることを確認せよ．

解答

$$\begin{aligned}\chi(t) &= 0 \qquad\qquad t<0\\ &= \frac{\chi_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geqq 0\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\,e^{i\omega t}dt\\ &= \frac{\chi_0}{\tau}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{\tau}}e^{i\omega t}dt\\ &= \frac{\chi_0}{\tau}\left[\frac{1}{-1/\tau+i\omega}e^{(-1/\tau+i\omega)t}\right]_0^{\infty}\\ &= \frac{\chi_0}{\tau}\left[0-\frac{1}{-1/\tau+i\omega}\right] = \frac{\chi_0}{1-i\omega\tau}\\ &= \frac{\chi_0}{1+\omega^2\tau^2}+i\frac{\chi_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\end{aligned} \tag{3.10}$$

となる．実部・虚部ともに，$\omega\to\infty$ で 0 となり，実部が偶関数，虚部が奇関数であることがわかる．

3-2. 分極の振る舞い $\boldsymbol{P}(t)$ を χ_1 と χ_2 で表した（3.12）より,（3.13）の表式を導け．

解答

$$\boldsymbol{P}(t) = \varepsilon_0\left[\chi_1\boldsymbol{E}_0\cos\omega_0 t+\chi_2\boldsymbol{E}_0\sin\omega_0 t\right] \tag{3.12}$$

なので，三角関数の合成を行い，余弦関数だけで表すと

$$\boldsymbol{P}(t) = \varepsilon_0\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}\boldsymbol{E}_0\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{3.13}$$

$$\sin\phi = \frac{\chi_2}{\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}}$$

となる．

3-3. 強制振動の問題で，外力の振動数を横軸に，振動の位相の遅れを縦軸にしたグラフを描け．外力の振動数が固有振動数に一致したときに，位相の遅れが $\pi/2$ となることを示せ（付録 B 参照）．位相の遅れとエネルギー損失の関係を考えよ．

解答 強制振動による位相の遅れ θ は

$$\tan\theta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{B-5}$$

なので，横軸を ω としてグラフにすると，図 B.2 のようになり，$\omega = \omega_0$ で $\theta = \pi/2$ となる．

強制振動の外力を

$$F = F_0 \cos\omega t$$

とし，振動の振幅 x を同位相成分 x_1 と $\pi/2$ ずれた成分 x_2 に分けて

$$x = x_1 \cos\omega t + x_2 \sin\omega t$$

と表す．外力が振動子に与える仕事率は

$$Fv = F\dot{x} = (F_0 \cos\omega t)(-x_1\omega \sin\omega t + x_2\omega \cos\omega t)$$

なので，１周期平均した外力のする仕事率は

$$\begin{aligned}
\langle w \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F\dot{x}dt \\
&= \frac{F_0\omega}{T}\int_0^T \left(x_2 \cos^2\omega t - x_1 \cos\omega t \cdot \sin\omega t\right) dt \\
&= \frac{F_0\omega}{2} x_2
\end{aligned}$$

となり，$\pi/2$ ずれた成分 x_2 に比例することがわかる．

電磁場がする仕事も同じように，$\pi/2$ ずれた分極成分であることを以下に示す．電磁場が単位時間・単位体積にする仕事は

$$w = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \tag{2.50}$$

であり，$\boldsymbol{J}$ は (2.24) で自由電流も $\omega_0 = 0$ の分極とみなして

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$$

となるので，$\boldsymbol{P}$ として (3.12) の形を用いれば

$$\begin{aligned}
w &= \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \\
&= \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \\
&= [\boldsymbol{E}_0 \cos\omega t] \cdot \varepsilon_0 \left[-\chi_1\omega \boldsymbol{E}_0 \sin\omega t + \chi_2\omega \boldsymbol{E}_0 \cos\omega t\right] \\
&= \varepsilon_0\omega \boldsymbol{E}_0^2 \left[\chi_2 \cos^2\omega t - \chi_1 \cos\omega t \cdot \sin\omega t\right]
\end{aligned}$$

となる．したがって，１周期平均した仕事率は

$$\begin{aligned}
\langle w \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T w dt \\
&= \frac{\varepsilon_0\omega \boldsymbol{E}_0^2}{T}\int_0^T \left[\chi_2 \cos^2\omega t - \chi_1 \cos\omega t \cdot \sin\omega t\right] dt \\
&= \frac{\varepsilon_0\omega \boldsymbol{E}_0^2}{2}\chi_2
\end{aligned}$$

となり，感受率の虚部 χ_2 に比例することがわかる．

3-4. デバイ緩和で，$\tau \to 0$ とすると線形物質を表すことを示せ．

解答 デバイ緩和の感受率は (3.10) なので，$\tau \to 0$ とすれば

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi_0$$

となり，実部が定数 χ_0 で虚部はない．これは線形物質の感受率そのものである．

実際，フーリエ変換して応答関数を求めると

$$\begin{aligned}\chi(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_0 e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \chi_0 \delta(t)\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{P}(t)$ と $\boldsymbol{E}(t)$ の関係は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t') \boldsymbol{E}(t-t') \\ &= \varepsilon_0 \chi_0 \boldsymbol{E}(t)\end{aligned}$$

と瞬時応答の線形物質になっている．

3-5. デバイ緩和の感受率 $\chi_1(\omega)$ と $\chi_2(\omega)$ が，K-K 関係を満たすことを示せ．

解答 式 (3.27) の右辺にデバイ緩和の感受率

$$\begin{aligned}\chi_1(\omega) &= \frac{\chi_0}{1+\omega^2\tau^2} \\ \chi_2(\omega) &= \frac{\chi_0 \omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\end{aligned}$$

を代入する．

まず，(3.27a) の右辺に $\chi_2(\omega)$ の具体的な式を入れて計算すると

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty} \frac{\chi_2(\omega_1)\,\omega_1}{\omega_1^2-\omega^2} d\omega_1 &= \frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty} \frac{\chi_0\omega_1\tau}{1+\omega_1^2\tau^2}\frac{\omega_1}{\omega_1^2-\omega^2} d\omega_1 \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\chi_0}{\tau}P\int_0^{\infty} \frac{\omega_1^2}{(\omega_1^2+\tau^{-2})(\omega_1^2-\omega^2)} d\omega_1 \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\chi_0}{\tau}P\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\left[\frac{1}{\omega_1^2+\tau^{-2}} + \frac{\omega^2\tau^2}{\omega_1^2-\omega^2}\right] d\omega_1 \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\chi_0}{\tau}\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega_1^2+\tau^{-2}} d\omega_1 + \omega^2\tau^2 P\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega_1^2-\omega^2} d\omega_1\right]\end{aligned}$$

となる．ここで積分公式

$$P\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-a^2} dx = 0, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \quad (a>0)$$

を利用すると

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\chi_2\left(\omega_1\right)\omega_1}{\omega_1^2-\omega^2}d\omega_1 &= \frac{2}{\pi}\frac{\chi_0}{\tau}\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega_1^2+\tau^{-2}}d\omega_1+\omega^2\tau^2P\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}d\omega_1\right]\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\chi_0}{\tau}\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}\left[\frac{\pi\tau}{2}+0\right]\\ &= \frac{\chi_0}{1+\omega^2\tau^2}\end{aligned}$$

となり，$\chi_1\left(\omega\right)$ と一致する．

同様に，(3.27b) の右辺に $\chi_1\left(\omega\right)$ の具体的な式を入れて計算すると

$$\begin{aligned}-\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\chi_1\left(\omega_1\right)}{\omega_1^2-\omega^2}d\omega_1 &= -\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\chi_0}{1+\omega_1^2\tau^2}\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}d\omega_1\\ &= -\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\chi_0}{1+\omega^2\tau^2}\left[\frac{-\tau^2}{1+\omega_1^2\tau^2}+\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}\right]d\omega_1\\ &= \frac{2\omega}{\pi}\frac{\chi_0}{1+\omega^2\tau^2}P\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\omega_1^2+\tau^{-2}}-\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}\right]d\omega_1\\ &= \frac{2\omega}{\pi}\frac{\chi_0}{1+\omega^2\tau^2}\left[\frac{\pi\tau}{2}-0\right]\\ &= \frac{\chi_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\end{aligned}$$

となって，$\chi_2\left(\omega\right)$ と一致する．

3-6. 比誘電率から光学定数を求める式（3.40a）と（3.40b）を導け．

解答 比誘電率と複素屈折率の関係

$$\sqrt{\varepsilon_1+i\varepsilon_2}=n+i\kappa$$

の両辺を二乗して，実部と虚部を比較すると

$$\varepsilon_1=n^2-\kappa^2 \tag{3.39a}$$

$$\varepsilon_2=2n\kappa \tag{3.39b}$$

を得る．この 2 つの式からまたはを消去すれば,

$$n=\sqrt{\frac{\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}{2}} \tag{3.40a}$$

$$\kappa=\sqrt{\frac{-\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}}{2}} \tag{3.40b}$$

を求めることができる．

3-7. 虚部がある場合のエネルギー密度を求める式（3.49）を導け．

解答 光電場を

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega_0 t \tag{3.46}$$

とすれば，$\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \left[\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_0 \cos \omega_0 t + \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_0 \sin \omega_0 t \right] \tag{3.47}$$

となる．問題 3-3 で調べたように，$\pi/2$ ずれた成分が仕事をするので，最終的に ε_2 の項が式（3-49）に残ることは予想できる．実際に，$\boldsymbol{E} \cdot \partial \boldsymbol{D}/\partial t$ を計算すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \left[\boldsymbol{E}_0 \cos \omega_0 t \right] \cdot \left[\varepsilon_0 \left[-\omega_0 \varepsilon_1 \boldsymbol{E}_0 \sin \omega_0 t + \omega_0 \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_0 \cos \omega_0 t \right] \right] \\ &= \varepsilon_0 \omega_0 \boldsymbol{E}_0^2 \left[-\varepsilon_1 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + \varepsilon_2 \cos^2 \omega_0 t \right] \end{aligned} \tag{3-7-1}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \right) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\boldsymbol{E}_0 \cos \omega_0 t \right] \cdot \left[\varepsilon_1 \boldsymbol{E}_0 \cos \omega_0 t + \varepsilon_2 \boldsymbol{E}_0 \sin \omega_0 t \right] \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_1 \cos^2 \omega_0 t + \varepsilon_2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \right] \right) \\ &= \varepsilon_0 \omega_0 \boldsymbol{E}_0^2 \left[-\varepsilon_1 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cos^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sin^2 \omega_0 t \right] \\ &= \varepsilon_0 \omega_0 \boldsymbol{E}_0^2 \left[-\varepsilon_1 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + \varepsilon_2 \cos^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right] \end{aligned} \tag{3-7-2}$$

となるので，(3-7-1) と (3-7-2) を比較することで

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_2 \omega_0 \boldsymbol{E}_0^2 \tag{3-48}$$

を得る．これにより，式（3.49）が導かれる．

3-8. 物質と電磁場を切り離した場合のポインティングベクトル $\boldsymbol{S}'$ とエネルギー密度 u' の表式（3.55）を導け．

解答 電磁場のする仕事率

$$w = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \tag{2.50}$$

の中の $\boldsymbol{J}$ として，すべての $\boldsymbol{J}$ を取り込む．一番最初に出てきた物質中のマクスウェル方程式に戻って，(2.20b) より

$$\boldsymbol{J} = \varepsilon_0 c^2 \left[\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right]$$

となるので，これを (2.50) に代入すると

$$
\begin{aligned}
w &= \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \\
&= \varepsilon_0 c^2 \left[\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B}\right] - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となる．２章で行ったように，ベクトル演算の公式

$$
\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})
$$

を利用すると

$$
\begin{aligned}
w &= -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}\right) + \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\
&= -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}\right) - \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\
&= -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \left|\boldsymbol{B}\right|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \left|\boldsymbol{E}\right|^2\right]
\end{aligned}
$$

となる．２番目の式の変形には，マクスウェル方程式（2.20a）を用いた．最後の式と

$$
w = -\nabla \cdot \boldsymbol{S}' - \frac{\partial}{\partial t} u'
$$

を比較することにより，(3.55) が導かれる．