2-1. 真空中のマクスウェル方程式を用いて，磁場 $\boldsymbol{B}$ が式（2.7）で表されること，および，式（2.8）を満たすことを示せ．

解答 電場が

$$\boldsymbol{E}(t,z) = \boldsymbol{E}_0 \cos(kz - \omega t + \phi)$$

で表されるならば，マクスウェル方程式の（2.1a）と（2.1b）より，磁場も

$$\boldsymbol{B}(t,z) = \boldsymbol{B}_0 \cos(kz - \omega t + \phi)$$

という形にならなければいけない．あとは，$\boldsymbol{B}_0$ の方向と大きさを考える．

$\boldsymbol{E}_0$ が z に垂直とわかったので，$\boldsymbol{E}_0$ の方向を x 方向とする．すなわち，

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \phi) \tag{1}$$

とする．$\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \phi) \tag{2}$$

と表して（式（2.1d）より，$B_z = 0$ がわかるが，ここでは B_z のままにしておいた），(2.1a）に代入すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -kE_x \sin(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega B_x \sin(kz - \omega t + \phi) \\ -\omega B_y \sin(kz - \omega t + \phi) \\ -\omega B_z \sin(kz - \omega t + \phi) \end{pmatrix}$$

となる．これより

$$B_x = 0,\ B_y = \frac{k}{\omega} E_x,\ B_z = 0 \tag{3}$$

であることがわかる．すなわち，$\boldsymbol{B}_0$ は y 軸方向を向いており，

$$\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{B}_0 \parallel \hat{\boldsymbol{z}} \tag{2.8a}$$

となることが示された．

また，$\omega = ck$ であることがわかっているので，(3）より

$$|\boldsymbol{B}_0| = \frac{1}{c} |\boldsymbol{E}_0| \tag{2.8b}$$

もすぐに示せるが，$\omega = ck$ がわかっていなくても，(1）と（2）を（2.1b）に代入することで

$$\begin{pmatrix} kB_y \sin(kz - \omega t + \phi) \\ -kB_x \sin(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c^2} E_x \sin(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので, (2.8b) を導くことができる.

2-2. 電磁気学の教科書を参考にして，分極 $\boldsymbol{p}$ によって生じる電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{J}$ について調べ，その物理的な意味を理解せよ.

解答 省略

2-3. $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ を用いて，一般的なマクスウェル方程式（2.27）を導け.

解答 物質中のマクスウェル方程式（2.20）の $\boldsymbol{J}$ と ρ に

$$\rho = \rho_{\mathrm{f}} - \nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{2.23}$$

を代入すると, (2.20b) と（2.20c）は

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left[\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 c^2 \nabla \times \boldsymbol{M}\right] \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho_{\mathrm{f}} - \nabla \cdot \boldsymbol{P}\right] \tag{5}$$

となる. (5) の両辺に ε_0 を掛けて整理すると

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_{\mathrm{f}}$$

となるので, (2.27c) が導かれる.

また, (4) の両辺に $\varepsilon_0 c^2$ を掛けて整理すると

$$\nabla \times \left[\varepsilon_0 c^2 (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M})\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\right] + \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$$

となるので，(2.27b) が導かれる．(2.27a) と（2.27d）は（2.20a）と（2.20d）と同じなので，以上でマクスウェル方程式（2.27）が導かれた.

2-4. 式（2.28）を縦波の式と横波の式に分解して，式（2.29）を導け.

解答 電場 $\boldsymbol{E}$ と分極 $\boldsymbol{P}$ を，横波と縦波に分解して

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{L}}$$

と表し，磁場 $\boldsymbol{B}$ については，横波 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{T}}$ しかないので，そのまま $\boldsymbol{B}$ で表す.

(2.28a) は

$$\nabla \times (\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

となるが，$\nabla \times \boldsymbol{E}_\mathrm{L} = 0$ なので

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_\mathrm{T} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.29a}$$

となる．

（2.28c）は

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{T} + \boldsymbol{E}_\mathrm{L} + \frac{\boldsymbol{P}_\mathrm{T} + \boldsymbol{P}_\mathrm{L}}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

となるが，$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{T} = 0$，$\nabla \cdot \boldsymbol{P}_\mathrm{T} = 0$ なので

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{L} + \frac{\boldsymbol{P}_\mathrm{L}}{\varepsilon_0} \right) = 0 \tag{2.29d}$$

となる．

（2.28b）は

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{T} + \boldsymbol{E}_\mathrm{L} \right) + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{P}_\mathrm{T} + \boldsymbol{P}_\mathrm{L} \right) \right]$$

となるが，この式を縦波成分と横波成分の 2 つの式に分解する．左辺は横波なので，横波成分は

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_\mathrm{T}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \boldsymbol{P}_\mathrm{T}}{\partial t} \right) \tag{2.29b}$$

であり，縦波成分は

$$0 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_\mathrm{L}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \boldsymbol{P}_\mathrm{L}}{\partial t} \right) \tag{2.29c}$$

となる．

以上により，式（2.29）が導かれた．

2-5. 1 章で導いた屈折率（1.32）を感受率 χ を使って表すと，式（2.45）になることを示せ．付録 C を参照せよ．

解答 付録 C のとおりである．

2-6. 宇宙空間を埋めつくしている背景放射（輻射）のエネルギー密度は $u = 4 \times 10^{-14}\ \mathrm{J/m^3}$ である．この放射の電場の 2 乗平均値を求めよ．その電場の大きさは，1W の携帯電話が発する電場の，どれくらいの距離の強度と等しいか．

解答 電磁場のエネルギー密度は

$$\langle u \rangle = \varepsilon \left\langle |\boldsymbol{E}|^2 \right\rangle \tag{2.63}$$

で表されているが，空気中では真空と同じで $\varepsilon = \varepsilon_0$ としていいので

$$\langle u \rangle = \varepsilon_0 \left\langle |\boldsymbol{E}|^2 \right\rangle = 4 \times 10^{-14} \ \left[\mathrm{J/m^3}\right] \tag{6}$$

となり，

$$\begin{aligned}\left\langle |\boldsymbol{E}|^2 \right\rangle &= \frac{4 \times 10^{-14}}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{4 \times 10^{-14}}{8.854 \times 10^{-12}} \ \left[\mathrm{V^2/m^2}\right] \\ &= 4.5 \times 10^{-3} \ \left[\mathrm{V^2/m^2}\right]\end{aligned}$$

と計算される．電場の 2 乗平均値は

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \sqrt{\left\langle |\boldsymbol{E}|^2 \right\rangle} = 6.7 \times 10^{-2} \ [\mathrm{V/m}] \\ &= 6.7 \times 10^{-4} \ [\mathrm{V/cm}]\end{aligned}$$

となる．この大きさの電場は，宇宙の背景放射の電場として存在している．

　また，1W の携帯電話から距離 R だけ離れた場所でのポインティングベクトルの大きさは，半径 R の球の面積で 1W を割った

$$\langle |\boldsymbol{S}| \rangle = \frac{1}{4\pi R^2} \ \left[\mathrm{W/m^2}\right]$$

となる．ポインティングベクトルの大きさは

$$\langle |\boldsymbol{S}| \rangle = \varepsilon_0 n c \left\langle |\boldsymbol{E}|^2 \right\rangle \tag{2.64}$$

であり，空気中では $n = 1$ なので

$$\varepsilon_0 c \left\langle |\boldsymbol{E}|^2 \right\rangle = \frac{1}{4\pi R^2}$$

となる．この電場の大きさと，背景放射の電場の大きさが等しくなる R を求めるので，左辺に（6）の値を入れると

$$c \times 4 \times 10^{-14} = \frac{1}{4\pi R^2}$$

となり，距離 R は

$$R = \sqrt{\frac{1}{4\pi c \times 4 \times 10^{-14}}} = 81 \ [\mathrm{m}]$$

と求められる．