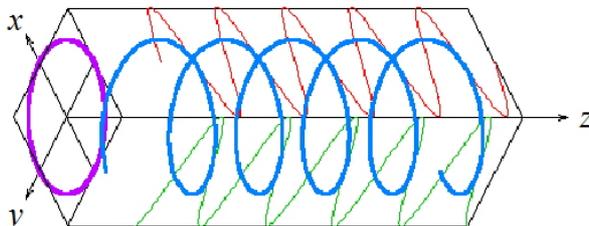


- 1-1. 身近な電気製品の中には電磁波を利用しているものが多い。いくつかを例にあげ（たとえば、携帯電話、電子レンジ、DVD プレーヤーなど）、用いている電磁波の振動数が図 1.2 のどの位置にあるかを示せ。

解答例 携帯電話：800 MHz ~ 2 GHz（超短波～マイクロ波）
 電子レンジ：2.45 GHz（マイクロ波）
 無線 LAN：2.45 GHz（電子レンジと同じ周波数を共有）
 地上波デジタル TV 放送：400 ~ 800 MHz（超短波）
 衛星放送：11 ~ 12 GHz（マイクロ波）
 DVD プレーヤー：波長 650 nm（可視光の赤）
 ブルーレイプレーヤー：波長 405 nm（可視光の青紫） など

- 1-2. 式 (1.10) で表される円偏光 $E_1 + E_2$ の電場の向きが z 方向に対してどのように変化するか図で表せ。また、 $E = E_1 + E_2$ が複素表示で式 (1.11) と表されることを示せ。

解答 以下のように、電場ベクトルが回転しながら進む。



$$E_1 = \text{Re } \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad E_2 = \text{Re } \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} i \hat{y}$$

なので、

$$E = \text{Re } \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} (\hat{x} + i \hat{y}) \text{ となる。}$$

- 1-3. 図 1.6(a) を参考にして、強め合う方向が式 (1.14) を満たすことを示せ。

解答 図 1 のように、隣の原子に当たる入射光の距離の差を s_1 、隣の原子から放出された 2 次光の進む距離の差を s_2 とすると

$$s_1 = d \sin \theta_i, \quad s_2 = d \sin \theta$$

であるから、強め合う条件は

$$|s_1 - s_2| = \text{波長の整数倍}$$

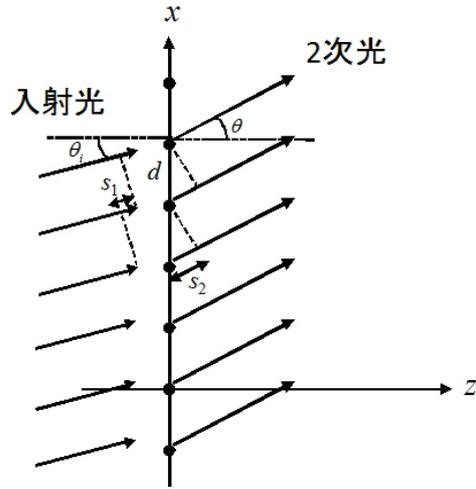


図 1: 入射光と 2 次光

となる．これにより，式 (1.14) が導かれる．

- 1-4. N 個の原子からの 2 次光の和が，どのような角度依存性を持つか考える．計算を簡単にするために，図 1.6(a) において，入射角を $\theta_i = 0$ とし， x 軸上の各原子から等しい振幅の 2 次光が発生すると仮定する． θ 方向で観測する 2 次光の和

$$E(\theta) = \sum_{n=1}^N E_n$$

を計算し， $I(\theta) \propto |E(\theta)|^2$ を θ の関数として図で表せ．角度の広がり $\Delta\theta$ は， $\Delta\theta \approx \lambda/Nd$ となることを示せ．

解答 図 2 のように，十分離れた観測点 P での電場を考える． n 番目の原子から P までの距離を z_n とすると

$$\begin{aligned} E_0 &= Ae^{ikz_0} \\ E_1 &= Ae^{ikz_1} \\ &\vdots \\ E_n &= Ae^{ikz_n} \end{aligned}$$

となる ($n = 1$ から N まででなく， $n = 0$ から $N - 1$ までとする)．ここで，振幅はすべて同じとした．また， z_n は

$$z_n = z_0 + nd \sin \theta$$

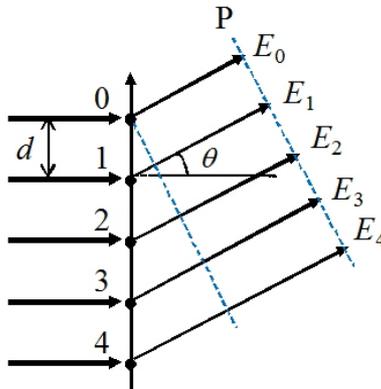


図 2: 1 - 4 の説明図

となることが図からわかる .

$E(\theta)$ を計算すると

$$E(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} E_n = A e^{ikz_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{inkd \sin \theta} = A e^{ikz_0} \frac{1 - e^{iNkd \sin \theta}}{1 - e^{ikd \sin \theta}}$$

となる . 強度は電場の 2 乗に比例するので

$$I(\theta) \propto |E(\theta)|^2 = A^2 \frac{1 - \cos [Nkd \sin \theta]}{1 - \cos [kd \sin \theta]} = A^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{Nkd \sin \theta}{2} \right]}{\sin^2 \left[\frac{kd \sin \theta}{2} \right]}$$

となる .

$d/\lambda = 1/1000$ として , 様々な N についてのグラフを描くと図 3 のようになる (全体を N^2 で割って縦軸を規格化している) . これからわかるように , $\theta = 0$ または π でのみ 2 次光が存在するためには , N が十分大きくなければいけない . おおまかな条件としては , $Nd \gg \lambda$ を満たせば良いことがグラフからわかる .

また角度の広がり $\Delta\theta$ として , $\theta = 0$ における $I(\theta)$ のピークは対称なので , 最初に $I(\theta)$ が 0 になる θ の値を θ_1 として , $\Delta\theta = \theta_1$ と見積もることができる . θ_1 は

$$\sin^2 \left[\frac{Nkd \sin \theta_1}{2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{Nkd \sin \theta_1}{2} = \pi$$

なので ,

$$\sin \theta_1 = 2\pi/Nkd = \lambda/Nd$$

となる . 幅が十分狭い状況を考えれば ($\theta_1 \ll 1$) , $\theta_1 = \lambda/Nd$ となるので , $\Delta\theta \approx \lambda/Nd$ と見積もることができる .

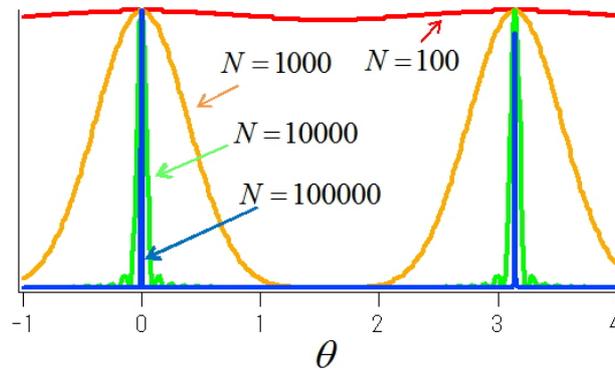


図 3: $I(\theta)$ のグラフ

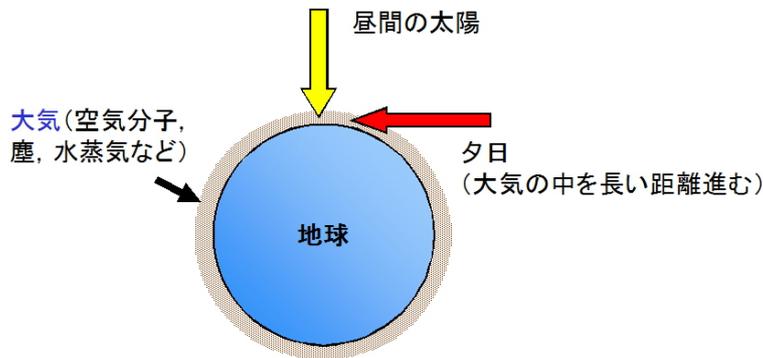


図 4: 空の青, 夕日の赤の説明図

1-5. レイリー散乱の散乱強度は振動数の 4 乗に比例 (波長の 4 乗に反比例) する。このことから、空が青い理由、夕日が赤い理由を説明せよ。

解答 レイリー散乱が波長の 4 乗に反比例するので、上空の大気における太陽光の散乱は波長の短い青い成分が強く散乱される。したがって、空全体は太陽光の中の青い成分が散乱されて、全体が青になっている。

夕日が赤い理由も同じことである。昼間の太陽は、真上方向から太陽光がやってくるが、夕日の場合には、地平線に沿って横からやってくる。その場合、図 4 を見てもわかるように、夕日の方が大気中を通る距離が圧倒的に長くなる。長い距離を通ってくることにより、太陽光の中の青い成分が散乱されて、生き残った赤い成分が強調されて、夕日は赤に見える。

1-6. 透過光の位相のずれを表す式 (1.25) を導け .

解答 式 (1.19) と (1.24) を等号で結び

$$E_1 = e^{ikz} [1 + re^{i\delta}] = |E_1| e^{i(kz + \delta_1)}$$

となるので ,

$$1 + re^{i\delta} = |E_1| e^{i\delta_1}$$

が導かれる . この式の両辺の実部と虚部を比較すれば

$$1 + r \cos \delta = |E_1| \cos \delta_1$$

$$r \sin \delta = |E_1| \sin \delta_1$$

となる . 2 つ目の式 (虚部の比較の式) から , 式 (1.25) が導かれる .

1-7. 量子力学的な考え方による屈折率の表式を導け . また , 振動子モデルでの屈折率の式 (1.32) に具体的に振動の振幅を代入した表式を導き , 二つの表式を比較せよ .

解答 距離 L 進むときに , 原子シートが l の間隔で存在すれば , 原子シートの枚数は L/l となる . 各原子シートで仮想励起が起き ,

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{1}{\omega_0 - \omega}$$

の時間だけ原子シートに留まるとすれば , 距離 L を通過する時間 T は

$$T = \frac{L}{l} \times \Delta t + \frac{L}{c} = L \left[\frac{1}{l(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{c} \right]$$

となる . ここで , 原子シートの厚みは無視できるので , 原子シート以外の伝搬距離を L とした . この式より , 物質内での光の速さが

$$v = \frac{L}{T} = \frac{1}{\frac{1}{l(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{c}} = \frac{c}{1 + \frac{c}{l(\omega_0 - \omega)}}$$

であることがわかる . 屈折率 n を

$$v = \frac{c}{n}$$

と表せば

$$n = 1 + \frac{c}{l(\omega_0 - \omega)} \quad (1)$$

となっていることがわかる . 屈折率の振動数依存性に着目すると

$$n - 1 \propto \frac{1}{\omega_0 - \omega}$$

となっている。

また、振動子モデルでの屈折率の表式

$$n - 1 \propto \frac{\text{[強制振動の振幅]}}{l}$$

に強制振動の振幅の式

$$\text{[強制振動の振幅]} \propto \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

を考えると、屈折率の振動数依存性は

$$n - 1 \propto \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2)$$

となっていることがわかる(1)と(2)を比べると、どちらも ω が ω_0 に近づくとき屈折率は1から大きくずれていくことがわかる。さらに(2)は

$$n - 1 \propto \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_0 - \omega} \cdot \frac{1}{\omega_0 + \omega}$$

なので、 $\omega \ll \omega_0$ の場合(透明の場合)には、 $1/(\omega_0 + \omega)$ は定数とみなせるので(1)と(2)は完全に同じ振動数依存性を示すことがわかる。

より詳しいことを考えると(2)は少し変形して

$$n - 1 \propto \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\omega_0 - \omega} + \frac{1}{\omega_0 + \omega} \right] \quad (3)$$

と表すことができる。本章では、仮想励起を考えて(1)を導いたが、より厳密な量子力学的な取り扱いを行うと(1)の表式に加えて(3)の最右辺の第2項に対応する $1/(\omega_0 + \omega)$ という項も現れる。